平成29年度　入学試験問題

数　学　問 題 用 紙（後期）

試験時間	９０分
問題用紙	１ ～ １２頁

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題用紙は持ち帰ること。

受験番号		氏　名	

[Ⅰ] 次の各問いの $\boxed{}$ に最も適する語句を下の ① ～ ④ から選び，その番号のみを解答用紙に記せ。

問1 a, b, c はすべて実数とする。$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ であることは，すべての実数 x に対して $ax^2 + bx + c > 0$ が成り立つための $\boxed{}$ 。

問2 △ABC において辺 AB, BC, CA の延長上の点をそれぞれ P, Q, R とするとき，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \cdot \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}} = 1$$

が成り立つことは，3 点 P, Q, R が同一直線上にあるための $\boxed{}$ 。

問3 p, q を整数とするとき，x の 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつことは，p, q のうち少なくとも 1 つが偶数であるための $\boxed{}$ 。

問4 a を実数の定数とする。実数 x に対する関数 $f(x)$ に関して，xy 平面における曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線 ℓ が存在しないか，または ℓ が y 軸に平行であることは，$f(x)$ が $x = a$ で連続でないための $\boxed{}$ 。

① 必要十分条件である

② 必要条件ではあるが十分条件ではない

③ 十分条件ではあるが必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

［II］ a, b を実数，r を正の実数として，xy 平面上の次の 2 つの集合を考える。

$$X = \{(x, y) \mid 4x - 3y \leqq 40,\ 3x + 4y \geqq -20,\ 7x - 24y \geqq -80\}$$

$$Y = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leqq r^2\}$$

このとき以下の各問いの答えのみを解答用紙に記せ。

問 1 $X \subset Y$ が成り立つような r の最小値を求めよ。またこのときの a, b の値をそれぞれ求めよ。

問 2 $Y \subset X$ が成り立つような r の最大値を求めよ。またこのときの a, b の値をそれぞれ求めよ。

[**III**]　四面体 OABC において，辺 OA を 1 : 3 に内分する点を P，辺 AB の中点を Q，線分 QC を 2 : 1 に内分する点を R，線分 PR を 3 : 2 に内分する点を S，直線 OS が平面 ABC と交わる点を T とする。このとき △BCT の面積は △ABC の面積の何倍か。

[IV]　次の 4 つの数 a, b, c, d に関する以下の各問いに答えよ。但し，対数の底は $e = 2.71828\cdots$ とする。

$$a = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x}, \qquad b = 3^{-5}, \qquad c = 4^{-4}, \qquad d = e^{\frac{1}{2}(\log a + \log b)}$$

問 1　a の値を求めよ。

問 2　a, b, c, d を小さい順に並べよ。

問 3　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(a^{x}+b^{x}+c^{x}+d^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

［V］ 以下の各問いに答えよ。

問1 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は微分可能，第2次導関数 $f''(x)$ は連続かつ $f''(x)>0$ を満たすとする。このとき，任意の実数 x_1, x_2 および $a_1+a_2=1$ を満たす0以上の任意の実数 a_1, a_2 に対して，不等式

$$f(a_1x_1+a_2x_2) \leqq a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$$

が成り立つことを， t の関数 $F(t)=a_1f(t)+a_2f(x_2)-f(a_1t+a_2x_2)$ を考えることにより証明せよ。

問2 問1と同じ条件を満たす関数 $f(x)$ に対して，番号 $n\,(\geqq 2)$ に関する帰納法により，不等式

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\right) \leqq \sum_{j=1}^{n} a_jf\left(x_j\right)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は任意の実数，また $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j=1$ を満たす0以上の任意の実数とする。

問3 $n\,(\geqq 2)$ 個の実数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ はすべて1より大とし，さらに $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j}=1$ を満たすとする。問2の不等式において，$f(x)=e^x$, $a_j=\dfrac{1}{p_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ と置いて得られる不等式を求めよ(答えのみでよい)。

問 4　各 p_j $(j=1,2,\cdots,n)$ は問 3 で与えられたものとし，また各 A_j $(j=1,2,\cdots,n)$ は $n\,(\geqq 2)$ 個の 0 以上の実数とする。$n\,(\geqq 2)$ に対して不等式

$$\prod_{j=1}^{n} A_j \leqq \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j^{p_j}}{p_j}$$

が成り立つことを，問 3 で得られた不等式において $x_j = p_j \log A_j$ と置くことにより証明せよ。ここに $\prod_{j=1}^{n} A_j$ は次で定義される：

$$\prod_{j=1}^{n} A_j = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

問 5　関数 $g(x)$ を，閉区間 $[a,b]$ (ただし $a<b$) で定義された恒等的に 0 でない連続関数とする。問 3 の各 p_j $(j=1,2,\cdots,n)$ に対し，問 4 の不等式で

$$A_j = \frac{|g_j(x)|}{\left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}\,dx\right)^{\frac{1}{p_j}}} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

と置くことにより，$n\,(\geqq 2)$ に対して不等式

$$\int_a^b \left(\prod_{j=1}^{n} |g_j(x)|\right) dx \leqq \prod_{j=1}^{n} \left\{ \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j}\,dx\right)^{\frac{1}{p_j}} \right\}$$

が成り立つことを証明せよ。